ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ LINH CHI

VỀ PHƯƠNG PHÁP LẶP HỮU HIỆU TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG VÀ BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2021

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ LINH CHI

VỀ PHƯƠNG PHÁP LẶP HỮU HIỆU TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG VÀ BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
1. TS. Trần Xuân Quý
2. TS. Vũ Vinh Quang

THÁI NGUYÊN - 2021

Mục lục

Bảng ký hiệu viết tắt

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbf{H}$.	không gian Hilbert thực
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai véc-tơ x và y
$\|\|x\|\|$	chuẩn của véc-tơ x
$P_C(x)$	hình chiếu của x lên C
$\inf_{y\in C} \|\|x-y\|\|$	infimum của tập $\{\|\|x-y\|\| : y \in C\}$
T	toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert
I	toán tử đồng nhất trong $\mathbf{H}$.
$G(T)$	đồ thị của toán tử T
$Fix(T)$	tập hợp các điểm bất động của T
$VI(A, C)$	bài toán bất đẳng thức biến phân

Mở đầu

Bài toán tìm điểm bất động chung đã và đang là một chủ đề thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Bài toán tìm điểm bất động và giải bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert: Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert $\mathbf{H}$.. Ánh xạ $A : C \to \mathbf{H}$ liên tục. Bài toán bất đẳng thức biến phân là tìm $x \in C$ sao cho

$$\langle A(x), y - x\rangle \geqslant 0, \quad \forall y \in C. \tag{0.1}$$

Bài toán bất đẳng thức biến phân được ký hiệu là $VI(A, C)$. Bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ $T : H \to \mathbf{H}$ là bài toán

$$\text{tìm } x \in \mathbf{H} \text{ sao cho } T(x) = x. \tag{0.2}$$

Mục đích của đề tài luận văn là trình bày bài toán điểm bất động chung của ánh xạ nửa co và bất đẳng thức biến phân với ánh xạ đơn điệu liên tục Lipchitz trong không gian Hilbert. Tức là tìm nghiệm chung của bài toán (0.1) và bài toán (0.2).

Dưới sự hướng dẫn của TS. Trần Xuân Quý và TS. Vũ Vinh Quang, tôi chọn đề tài luận văn: "Về phương pháp lặp hữu hiệu tìm điểm bất động chung và bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert".

Nội dung luận văn được trình bày trong hai chương, cụ thể như sau:

Chương 1: Trình bày về một số kết quả đặc trưng trong không gian Hilbert. Trình bày một số phương pháp lặp đã có liên quan tới bài toán tìm điểm bất động và bài toán bất đẳng thức biến phân.

Chương 2: Trình bày hai phần. Phần thứ nhất là trình bày khái quát về phương pháp lặp giải bài toán tìm điểm bất động chung và bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert, phần hai trình bày về phương pháp lặp hữu hiệu giải bài toán tìm điểm bất động chung và bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, em luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và động viên của các thầy cô trong Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, Khoa Toán – Tin.

Với bản luận văn này, em mong muốn được góp một phần nhỏ công sức của mình vào việc gìn giữ và phát huy vẻ đẹp, sự hấp dẫn cho những định lý toán học vốn dĩ đã rất đẹp. Đây cũng là một cơ hội cho em gửi lời tri ân tới tập thể các thầy cô giảng viên của trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên nói chung và Khoa Toán – Tin nói riêng, đã truyền thụ cho em nhiều kiến thức khoa học quý báu trong thời gian em được là học viên của trường. Em xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu trường THPT Phú Lương, Thái Nguyên cùng toàn thể các anh chị em đồng nghiệp đã tạo điều kiện tốt nhất cho em trong thời gian đi học Cao học; cảm ơn các anh chị em học viên lớp Cao học Toán K12 và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ em trong quá trình học tập và làm luận văn tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới giáo viên hướng dẫn, TS. Trần Xuân Quý và TS. Vũ Vinh Quang đã luôn quan tâm ân cần chỉ bảo, động viên khích lệ, giúp đỡ tận tình và góp ý sâu sắc cho em trong suốt quá trình học tập cũng như thực hiện đề tài.

Chặng đường vừa qua sẽ là những kỉ niệm đáng nhớ và đầy ý nghĩa đối với các anh chị em học viên lớp K12 nói chung và với bản thân em nói riêng. Dấu ấn ấy hiển nhiên không thể thiếu sự hỗ trợ, sẻ chia đầy yêu thương của cha mẹ hai bên và các anh chị em con cháu trong gia đình. Xin chân thành cảm ơn tất cả những người thân yêu đã giúp đỡ, đồng hành cùng em trên chặng đường vừa qua.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Thái Nguyên, 26 tháng 01 năm 2021.

Học viên

Vũ Thị Linh Chi

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert và một số khái niệm, định nghĩa. Đồng thời trình bày về toán tử, bài toán tìm điểm bất động và bài toán bất đẳng thức biến phân. Các kiến thức trong chương được tham khảo trong các tài liệu [1, 17]. Chương này trình bày một số kết quả trong không gian Hilbert và một số phương pháp lặp đã có liên quan tới bài toán tìm điểm bất động và bài toán bất đẳng thức biến phân.

1.1 Một số khái niệm và kết quả đặc trưng trong không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1.1. Cho $\mathbf{H}$ là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$, tích vô hướng xác định trong $\mathbf{H}$. là một ánh xạ

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle : \mathbf{H} \times \mathbf{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ với mọi $x, y \in \mathbf{H}$;

2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ với mọi $x, y, z \in \mathbf{H}$;

3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ với mọi $x, y \in \mathbf{H}$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in \mathbf{H}$ và $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Số $\langle x, y \rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai vectơ x, y trong $\mathbf{H}$.

Định nghĩa 1.1.2. Cặp $(\mathbf{H}, \langle ., . \rangle)$, trong đó $\mathbf{H}$ là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$, $\langle ., . \rangle$ là tích vô hướng trên $\mathbf{H}$ được gọi là không gian tiền Hilbert thực.

Định lý 1.1.3. (Bất đẳng thức Schwarz) Trong không gian tiền Hilbert $\mathbf{H}$ với mọi $x, y \in \mathbf{H}$ ta luôn có đẳng thức sau:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leqslant \langle x, y \rangle . \langle x, y \rangle .$$

Định lý 1.1.4. Mọi không gian tiền Hilbert $\mathbf{H}$. đều là không gian tuyến tính định chuẩn, với chuẩn được xác định bởi công thức

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in \mathbf{H}. \tag{1.1}$$

Chuẩn này được gọi là chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng.

Định nghĩa 1.1.5. Nếu $\mathbf{H}$. là không gian tiền Hilbert thực và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng xác định bởi (1.1) thì $\mathbf{H}$. được gọi là không gian Hilbert thực.

Ví dụ 1.1.6. Không gian $\mathbb{R}^n$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

trong đó

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n); \; y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

và chuẩn cảm sinh

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Ví dụ 1.1.7. Không gian

$$l^2 = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

là không gian Hilbert với tích vô hướng,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad y = (y_n)_n \in l^2$$

và chuẩn

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ví dụ 1.1.8. Không gian $L^2[a,b]$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}dt, \forall x, y \in L^2[a,b],$$

và chuẩn

$$||x|| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mệnh đề 1.1.9 (Đẳng thức hình bình hành)**.** Trong không gian Hilbert thực **H**. ta luôn có đẳng thức sau:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2),$$

với mọi $x, y \in \mathbf{H}$.

Chứng minh. Ta luôn có

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle xx, y\rangle + ||y||^2,$$
$$||x-y||^2 = ||x||^2 - 2\langle xx, y\rangle + ||y||^2.$$

Cộng hai đẳng thức trên ta nhận được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.1.10. Trong không gian Hilbert thực **H**. ta luôn có đẳng thức sau

$$||x-y||^2 + ||x-z||^2 = ||y-z||^2 + 2\langle x-y, x-z\rangle,$$

với mọi $x, y, z \in \mathbf{H}$.

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} ||y-z||^2 + 2\langle x-y, x-z\rangle &= \langle y, y\rangle + \langle z, z\rangle + 2\langle x, x\rangle - 2\langle x, z\rangle - 2\langle x, y\rangle \\ &= [\langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle] \\ &\quad + [\langle x, x\rangle - 2\langle x, z\rangle + \langle z, z\rangle] \\ &= ||x-y||^2 + ||x-z||^2. \end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.1.11. Trong không gian Hilbert thực **H**. , ta luôn có

(i). $||\lambda x + (1-\lambda)y||^2 = \lambda||x||^2 + (1-\lambda)||y||^2 - \lambda(1-\lambda)||x-y||^2.$

(ii). $||x+y||^2 \leqslant ||x||^2 + 2\langle y, x+y\rangle.$

với mọi $x, y \in \mathbf{H}$.

Chứng minh. (i). Ta có

$$\begin{aligned}||\lambda x + (1-\lambda)y||^2 &= \lambda^2||x||^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x, y\rangle + (1-\lambda)^2||y||^2\\ &= \lambda||x||^2 + (1-\lambda)||y||^2 - \lambda(1-\lambda)(||x||^2 - 2\langle x, y\rangle + ||y||^2)\\ &= \lambda||x||^2 + (1-\lambda)||y||^2 - \lambda(1-\lambda)||x-y||^2.\end{aligned}$$

Ta được điều phải chứng minh.

(ii). Với mọi $x, y \in \mathbf{H}$, ta có

$$\begin{aligned}||x+y||^2 &= ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2\\ &\leqslant ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + 2||y||^2\\ &= ||x||^2 + 2\langle y, x+y\rangle.\end{aligned}$$

Ta được điều phải chứng minh.

□

Định nghĩa 1.1.12. Cho $\mathbf{H}$ là không gian Hilbert. Dãy $\{x_n\} \subset \mathbf{H}$. Khi đó ta có các khái niệm sau

(a). Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là hội tụ yếu đến phần tử $x \in \mathbf{H}$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle, \quad \forall y \in \mathbf{H}.$$

(b). Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là hội tụ mạnh đến phần tử $x \in \mathbf{H}$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0.$$

Kí hiệu $x_n \rightharpoonup x$ chỉ sự hội tụ yếu, $x_n \to x$ chỉ sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}$ đến phần tử $x \in \mathbf{H}$.

Định nghĩa 1.1.13. (a). Tập hợp $C \subseteq \mathbf{H}$ được gọi là tập lồi nếu

$$\forall x_1, x_2 \in C,\ \forall\lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C.$$

(b). Tập $C \subset \mathbf{H}$ được gọi là tập đóng nếu mọi dãy hội tụ $\{x_n\} \subset C$ đều có giới hạn thuộc C, nghĩa là với mọi $\{x_n\} \subset C$ sao cho $x_n \to x$ khi $n \to \infty$ kéo theo $x \in C$.